

锤子数学精彩解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 样本数据 6, 8, 4, 5, 12 的中位数为

- A. 5 B. 6 C. 8 D. 9

【答案】B

【锤子数学解析】将数据从小到大排列为 4, 5, 6, 8, 12，中间数为 6，选 B.

2. 已知平面向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 不共线，且 $2\vec{a} + y\vec{b} = x\vec{a} - 3\vec{b}$ ，则

- A. $x=2$, $y=-3$ B. $x=-2$, $y=3$ C. $x=2$, $y=3$ D. $x=-2$, $y=-3$

【答案】A

【锤子数学解析】因为 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 不共线，所以对应系数相等，得 $x=2$, $y=-3$ ，选 A.

3. 已知集合 $A = \left\{ \sin \frac{7\pi}{6}, \cos \frac{5\pi}{3}, \tan \frac{5\pi}{4} \right\}$, $B = \left\{ \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}, 1 \right\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $\left\{ \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2} \right\}$ B. $\left\{ \frac{-\sqrt{3}}{2}, 1 \right\}$
C. $\left\{ \frac{-1}{2}, 1 \right\}$ D. $\left\{ \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}, 1 \right\}$

【答案】C

【锤子数学解析】 $\sin \frac{7\pi}{6} = \frac{-1}{2}$, $\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\tan \frac{5\pi}{4} = 1$ ，所以 $A = \left\{ \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$ ，则

$A \cap B = \left\{ \frac{-1}{2}, 1 \right\}$ ，选 C.

4. 曲线 $y = 5x + 8 \ln x$ 在点 (1, 5) 处的切线方程为

- A. $y = 3x + 2$ B. $y = 5x$ C. $y = 8x - 3$ D. $y = 13x - 8$

【答案】D

【锤子数学解析】 $y' = 5 + \frac{8}{x}$, 当 $x=1$ 时, $y'=13$, 切线为 $y-5=13(x-1)$, 即 $y=13x-8$
选 D.

5. 已知抛物线 $C_1: y^2 = 2p_1x$ ($p_1 > 0$) 和 $C_2: x^2 = 2p_2y$ ($p_2 > 0$) 均经过点 $(4, 8)$, 则 C_1 的焦点与 C_2 的焦点之间的距离为

A. 12 B. $4\sqrt{5}$ C. 6 D. $\frac{\sqrt{65}}{2}$

【答案】D

【锤子数学解析】由 $64 = 8p_1$ 得 $p_1 = 8$, 由 $16 = 16p_2$ 得 $p_2 = 1$. 因为 $y^2 = 2px$ 的焦点为 $(\frac{p}{2}, 0)$, $x^2 = 2py$ 的焦点为 $(0, \frac{p}{2})$, 所以两焦点为 $(4, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$, 距离为 $\sqrt{4^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$, 选 D.

6. 已知函数 $f(x) = \frac{x+2}{e^x+a}$ 的最大值为 1, 则 $a =$

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

【答案】B

【锤子数学解析】由选项知 $a > 0$, 分母恒正. 最大值为 1, 即 $x+2 \leq e^x + a$ 对一切 x 成立, 且能取等. 设 $h(x) = x+2-e^x$, 则 $h'(x) = 1-e^x$, 当 $x=0$ 时 $h(x)$ 最大, 且 $h(0)=1$, 所以 $a=1$, 选 B.

7. 一百零八塔位于宁夏回族自治区青铜峡市, 以其独特的建筑格局和深远的历史文化

闻名遐迩. 该塔群共有 108 座塔, 依山势自上而下排成 12 行, 将第 i 行中塔的座数记为 a_i ($i=1, 2, \dots, 12$), 其中 $a_1=1$, $a_2=a_3=3$, $a_4=a_5=5$, 且 $a_6, a_7, \dots, a_{12}$ 是一个首项为 7, 公差为 2 的等差数列. 将 $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ 分为 6 组, 每组 2 个数, 使得每组的 2 个数之和可构成一个项数为 6 且公差为 d ($d > 0$) 的等差数列, 则 $d =$

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

【答案】B

【锤子数学解析】 $a_1=1, a_2=a_3=3, a_4=a_5=5, n \geq 6$ 时,

$$a_n = 7 + (n-6)2 = 2n-5$$

设新数列为 $\{b_n\}$, $\{b_n\}$ 为等差数列, $6b_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 108, \therefore 2b_1 + 5d = 36,$

$b_1 \in \mathbf{N}, d \in \mathbf{N}, b_1 = 8, d = 4$, 选 B.

8. 设 $U = \{(x_1, x_2, x_3) | x_i \in \{-2, -1, 1, 2\}, i = 1, 2, 3\}$ 为空间中 64 个点构成的集合, 点 $P(1, 1, 1)$, 记样本空间 $\Omega = C_U \{P\}$. 从 Ω 中随机取一个点, 定义随机变量 X 如下: 对 Ω 中的每个点 $A(x_1, x_2, x_3)$, 令 $X(A) = x_1 + x_2 + x_3$, 则 X 的数学期望为

- A. $-\frac{1}{21}$ B. $-\frac{1}{63}$ C. 0 D. $\frac{1}{7}$

【答案】A

【锤子数学解析】

方法一: 对 U 中所有点求和, 每个坐标中 $-2, -1, 1, 2$ 各出现 16 次, 所以

$\sum_{A \in U} X(A) = 3 \times 16 \times (-2 - 1 + 1 + 2) = 0$. 去掉 $P(1, 1, 1)$ 后, 少掉的值为 $X(P) = 3$, 于是

$\sum_{A \in \Omega} X(A) = 0 - 3 = -3$. 又 $|\Omega| = 63$, 故 $E(X) = -\frac{3}{63} = -\frac{1}{21}$, 选 A.

方法二: U 关于原点成中心对称, 把点 A 与 $-A$ 配对, 两个点的 X 值相反, 全部抵消. 现在只删去 $P(1, 1, 1)$, 它的配对点 $-P(-1, -1, -1)$ 留下, 贡献为 $X(-P) = -3$, 因此

平均值立刻是 $E(X) = -\frac{3}{63} = -\frac{1}{21}$, 选 A.

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 设 $z = 3 + 2i$, 则

- A. $\bar{z} = 3 - 2i$ B. $|z| = 5$ C. $z^2 = 5 + 12i$ D. $\frac{z+3}{z-i} \in \mathbf{R}$

【答案】ACD

【锤子数学解析】由 $z=3+2i$ ，得 $\bar{z}=3-2i$ ，A 正确； $|z|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}\neq 5$ ，B 错；

$$z^2=(3+2i)^2=9+12i-4=5+12i, \text{ C 正确}; \frac{z+3}{z-i}=\frac{6+2i}{3+i}=\frac{(6+2i)(3-i)}{10}=2\in R, \text{ D 正确};$$

正确；故选 ACD.

10. 在空间中， A, B 为两个定点，动点 C 到直线 AB 的距离为 2，动点 D 到直线 AB 的距离为 1，若二面角 $C-AB-D$ 为 60° ，则

A. $\angle CAD \geq 60^\circ$ B. $CD \geq \sqrt{3}$

C. 当 $AB \perp CD$ 时， $CD \perp$ 平面 ABD D. 当 $AB \perp$ 平面 ACD 时， $AC \perp AD$

【答案】BC

【锤子数学解析】以直线 AB 为 x 轴，设 A 为原点， $C=(x_1, u_1, u_2)$ ， $D=(x_2, v_1, v_2)$ ，则 $u_1^2+u_2^2=4$ ， $v_1^2+v_2^2=1$ ， $u_1v_1+u_2v_2=1$.

A: 取 $x_1=x_2=t$ ，则 $\cos \angle CAD = \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+4}\sqrt{t^2+1}} \rightarrow 1$ ，所以 $\angle CAD$ 可以小于 60° ，A 错；

B: $CD^2=(x_1-x_2)^2+(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2=(x_1-x_2)^2+4+1-2=(x_1-x_2)^2+3 \geq 3$ ，所以 $CD \geq \sqrt{3}$ ，B 正确；

C: 若 $AB \perp CD$ ，则 $x_1=x_2$ ，此时直线 CD 与 AD 的方向向量数量积为

$$(0, v_1-u_1, v_2-u_2) \cdot (x_1, v_1, v_2) = (v_1^2+v_2^2)-(u_1v_1+u_2v_2)=1-1=0, \text{ 又 } CD \perp AB, \text{ 所以 } CD \perp \text{平面 } ABD, \text{ C 正确};$$

D: 若 $AB \perp$ 平面 ACD ，则 $x_1=x_2=0$ ，此时 $(u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1v_1+u_2v_2=1 \neq 0$ ，所以 $AC \perp AD$ 不成立，D 错；故选 BC.

11. 已知圆 $C_1:(x+1)^2+y^2=1$ ，圆 $C_2:(x-1)^2+y^2=1$ ，圆 $C_3:x^2+(y-\sqrt{3})^2=1$. 直线 $l:y=kx+b$ 与 C_1, C_2, C_3 均有两个交点. 记 l 被 C_1, C_2, C_3 截得弦长为 s_1, s_2, s_3 ，则

A. k 可以取任意实数

B. 满足 $s_1=s_2=s_3$ 的直线 l 共有 3 条

C. 满足 $s_1+s_2+s_3=3$ 的直线 l 多于 3 条

D. 当 $b=0$ 时, $s_1+s_2+s_3$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

【答案】BCD

【锤子数学解析】

方法一: 设 $q = \sqrt{1+k^2}$, 圆心到直线 l 的有向距离分别为

$$d_1 = \frac{b-k}{q}, d_2 = \frac{b+k}{q}, d_3 = \frac{b-\sqrt{3}}{q}, \text{ 所以 } s_i = 2\sqrt{1-d_i^2}, \text{ 且必须有 } |d_i| < 1.$$

A: 若 $k = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, 则 $q = \frac{2}{\sqrt{3}}$. 由 $|b-k| < q$ 得 $b < \frac{1}{\sqrt{3}}$, 由 $|b-\sqrt{3}| < q$ 得 $b > \frac{1}{\sqrt{3}}$, 矛盾, 故 A 错.

B: 由 $s_1 = s_2 = s_3$ 得 $|b-k| = |b+k| = |b-\sqrt{3}|$. 先由 $|b-k| = |b+k|$ 得 $b=0$ 或 $k=0$. 若 $k=0$, 则 $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 若 $b=0$, 则 $k = \pm\sqrt{3}$. 三条直线都满足割线条件, 故 B 正确.

C: 取 $b=0$, 记 $u = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$, 则 $s_1+s_2+s_3 = 4u + 2\sqrt{1-3u^2}$. 令其等于 3, 得

$$4u + 2\sqrt{1-3u^2} = 3, \text{ 平方得 } 28u^2 - 24u + 5 = 0, \text{ 解得 } u = \frac{1}{2} \text{ 或 } u = \frac{5}{14}, \text{ 对应 } k = \pm\sqrt{3} \text{ 或 } k = \pm\frac{\sqrt{171}}{5}, \text{ 已有 4 条直线, 故 C 正确.}$$

D: 当 $b=0$ 时, 仍有 $S = s_1+s_2+s_3 = 4u + 2\sqrt{1-3u^2}$, $0 < u < \frac{1}{\sqrt{3}}$. 令 $v = \sqrt{1-3u^2}$, 则

$$3u^2 + v^2 = 1. \text{ 由柯西不等式, } S^2 \leq \left(\frac{16}{3} + 4\right)(3u^2 + v^2) = \frac{28}{3}, \text{ 当 } u = \frac{2}{\sqrt{21}} \text{ 时取等, 所}$$

$$\text{以 } S_{\max} = \frac{2\sqrt{21}}{3}, \quad \text{D 正确. 故选 BCD.}$$

方法二: 把三个圆心记为 O_1, O_2, O_3 , 它们是边长为 2 的正三角形. 直线能同时割三圆, 等价于三个圆心在法向上的投影能放进长度为 2 的开区间. 若法向平行 O_1O_3 , 对应 $k = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, 投影宽度正好是 2, 开区间无法盖住, A 错.

弦长只由圆心到直线的距离决定. 三弦相等时, 直线到三个顶点距离相等; 这样的直线正好是与三边分别平行、并平分对应顶点到对边距离的 3 条, 即 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $y = \sqrt{3}x$ 、 $y = -\sqrt{3}x$, B 正确.

再看过原点的直线. 设 $t = |\cos \theta|$, 则 $s_1 = s_2 = 2t, s_3 = 2\sqrt{1-3t^2}$, 于是 $S = 4t + 2\sqrt{1-3t^2}$. 令 $S = 3$, 同样得 $t = \frac{1}{2}$ 或 $t = \frac{5}{14}$, 对应四条过原点的直线, 故 C 正确.

令 $u = \sqrt{3}t, v = \sqrt{1-3t^2}$, 则 $u^2 + v^2 = 1$. 而 $S = \frac{4}{\sqrt{3}}u + 2v \leq \sqrt{\frac{16}{3} + 4} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$, 等号在 $t = \frac{2}{\sqrt{21}}$ 时可取, D 正确, 故选 BCD.

三、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 双曲线 $5x^2 - 6y^2 = 1$ 的离心率为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{66}}{6}$

【锤子数学解析】 由 $5x^2 - 6y^2 = 1$, 得 $a^2 = \frac{1}{5}$, $b^2 = \frac{1}{6}$, 所以 $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{11}{30}$, $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{11}{6}$, 故 $e = \frac{\sqrt{66}}{6}$, 应填: $\frac{\sqrt{66}}{6}$.

13. 已知 $f(x) = 2\sin(ax + \theta)$ ($a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \theta < 2\pi$) 是偶函数, $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增.

则 $\theta =$ _____, $f(\frac{2\pi}{3}) =$ _____.

【答案】 $\frac{3\pi}{2}$; 1

【锤子数学解析】 若 $a = 0$, 则 $f(x)$ 为常函数, 不合题意. 若 $a \neq 0$, 由 $f(-x) = f(x)$, 得 $\sin(\theta - ax) = \sin(\theta + ax)$, 所以 $2\cos\theta\sin(ax) = 0$, 从而 $\cos\theta = 0$. 又 $0 \leq \theta < 2\pi$, 故 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) = 2\cos ax$, 不合单调递增; 当 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 时, $f(x) = -2\cos ax$ 。此

时 $f'(x) = 2a\sin ax$, 要在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内恒为正, 需 $|a| = 1$ 或 $|a| = 2$ 。于是

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2\cos\frac{2\pi a}{3} = 1, \text{ 应填: } \frac{3\pi}{2}; 1.$$

14. 设实数 q 满足: 存在数列 $\{a_n\}$, 使得对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 均有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{3n} = n^2 + n$, 且 $\{a_n\}$ 中有某连续 9 项 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+8}$ 是公比为 q 的等比数列。则 q 的最大值为。

【答案】 $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

【锤子数学解析】

方法一: 令 $T_n = a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}$, 由题意得 $T_n = (n^2 + n) - [(n-1)^2 + (n-1)] = 2n$, 因此每个三项块 B_n 的和为 $2n$ 。

设这 9 项为 $x, xq, xq^2, \dots, xq^8$, 记 $C = 1 + q + q^2$ 。由于 $C > 0$, 且完整三项块和均为正, 下面按 k 除以 3 的余数讨论。

1、若 $k = 3m+1 (m \geq 0)$, 这 9 项正好包含三个完整三项块, 得 $xC = 2(m+1)$,

$$xq^3C = 2(m+2), \quad xq^6C = 2(m+3). \text{ 于是 } q^3 = \frac{m+2}{m+1} \text{ 且 } q^3 = \frac{m+3}{m+2}, \text{ 矛盾, 故这种起点不存在.}$$

2、若 $k = 3m+2 (m \geq 0)$, 其中两个完整三项块为第 $m+2$ 、 $m+3$ 块, 得 $xq^2C = 2(m+2)$

$$xq^5C = 2(m+3), \text{ 所以 } q^3 = \frac{m+3}{m+2} \leq \frac{3}{2}.$$

3、若 $k = 3m (m \geq 1)$, 其中两个完整三项块为第 $m+1$ 、 $m+2$ 块, 得 $xqC = 2(m+1)$,

$$xq^4C = 2(m+2), \text{ 所以 } q^3 = \frac{m+2}{m+1} \leq \frac{3}{2}.$$

综上 $q^3 \leq \frac{3}{2}$, 所以 $q \leq \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ 。等号可以取到: 取 $k=2, q = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$, 令 $x = \frac{4}{q^2(1+q+q^2)}$,

设 $a_{2+i} = xq^i (0 \leq i \leq 8)$, 则 $B_2 = 4, B_3 = 6$; 再把 B_1, B_4 及其余三项块补足到规定的和 $2n$

即可构成符合条件的数列。应填: $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ 。

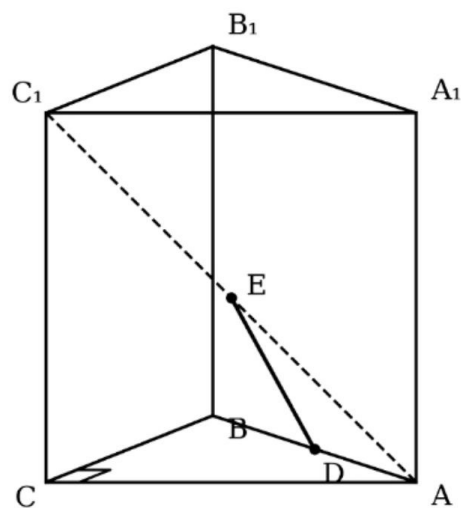
方法二：9 个连续位置至少含两个相邻完整三项块，它们在等比九项中相隔 3 项，所以相邻完整块和之比就是 q^3 ；若含三个完整块，则 $2s, 2(s+1), 2(s+2)$ 不成等比，排除。

能放进窗口的最早相邻完整块是 B_2, B_3 ，和为 4, 6，故 $q^3 \leq \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ 。第 2 到第 10 项

成等比并令 $B_2 = 4, B_3 = 6$ 可取等，故最大值为 $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ 。

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， D, E 分别为 AB, AC_1 的中点。



(1) 证明： $DE \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ；

(2) 设 $CC_1 = 2$ ，直线 DE 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 45° ，求直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离。

【锤子数学解析】

(1) 设 $AC = BC = a$ ， $CC_1 = h$ ，以 C 为原点，分别以 CA, CB, CC_1 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系。

则 $A(a, 0, 0)$ ， $B(0, a, 0)$ ， $C_1(0, 0, h)$ 。

因为 D, E 分别为 AB, AC_1 的中点，所以 $D\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$ ， $E\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{h}{2}\right)$ ，

从而 $\overrightarrow{DE} = \left(0, -\frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right)$.

平面 BCC_1B_1 为 $x=0$, 直线 DE 的方向中 x 分量为 0, 且 D 不在该平面内, 所以 $DE \parallel$ 平面 BCC_1B_1 .

(2) 由 $CC_1=2$, 得 $\overrightarrow{DE} = \left(0, -\frac{a}{2}, 1\right)$. 平面 ACC_1A_1 为 $y=0$, 其法线方向可取 $n=(0, 1, 0)$.

设直线 DE 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 θ , 则 $\sin\theta = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}}$.

由 $\theta=45^\circ$, 得 $\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $a=2$.

因为直线 DE 平行于平面 BCC_1B_1 , 所以所求距离为 $\frac{a}{2}=1$.

16. (15 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3$, $BC=2\sqrt{3}$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求 $\cos A$;

(2) 设 D, E 两点满足: D 在 BA 的延长线上, $DE \parallel BC$, $AE \perp AC$. 若 $DE = \sqrt{6}$, 求 CE .

【锤子数学解析】

(1) 由余弦定理, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 9 + 12 - 12 = 9$,
所以 $AC=3$, 从而 $AB=AC=3$.

因此 $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{9+9-12}{18} = \frac{1}{3}$.

(2) 以 A 为原点, AC 所在直线为 x 轴, 过 A 且垂直于 AC 的直线为 y 轴.

由 (1) 知 $C(3, 0)$, 又 $B(3\cos A, 3\sin A) = B(1, 2\sqrt{2})$.

$$D = A + t(A - B), t > 0, \text{ 则 } D(-t, -2\sqrt{2}t).$$

$$E = D + \lambda(C - B). \text{ 因为 } DE \parallel BC \text{ 且 } D \text{ 在 } BA \text{ 的延长线上, 所以 } \lambda > 0.$$

$$DE = \sqrt{6}, \quad BC = 2\sqrt{3}, \text{ 得 } \lambda = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$AE \perp AC, \text{ 所以点 } E \text{ 的横坐标为 } 0, \text{ 即 } -t + 2\lambda = 0, \text{ 得 } t = 2\lambda = \sqrt{2}.$$

$$\text{是 } E = (0, -2\sqrt{2}t - 2\sqrt{2}\lambda) = (0, -6),$$

$$\text{以 } CE = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}.$$

15 分) 设整数 $N \geq 2$, 某同学用一个球进行投篮练习, 至多投篮 N 次, 当且中 1 次时或 N 次均未投中时, 停止练习. 设该同学每次投中的概率为 p ($0 < p < 1$), 各次投中与否相互独立, 记 X 为停止练习时该同学的投篮次数.

1) 当 $N = 4$, $p = \frac{1}{3}$ 时, 求 X 的分布列;

2) 设 k, m 均为自然数.

i) 当 $k \leq N - 1$ 时, 求 $P(X > k)$;

ii) 当 $k + m \leq N - 1$ 时, 证明: $P(X > k + m | X > k) = P(X > m)$.

锤子数学解析】

1) 令 $q = 1 - p = \frac{2}{3}$. 当 $i = 1, 2, 3$ 时, $P(X = i) = q^{i-1}p$;

$$P(X = 4) = q^3p + q^4 = q^3 = \frac{8}{27}.$$

以 X 的分布列为:

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$

2) 记 $q = 1 - p$.

(i) 当 $k \leq N-1$ 时, 事件 $P(X > k)$ 表示前 k 次都未投中, 所以

$$P(X > k) = q^k = (1-p)^k.$$

(ii) 由 $k+m \leq N-1$, 得 $m \leq N-1$. 因此

$$P(X > k+m | X > k) = \frac{P(X > k+m)}{P(X > k)} = \frac{q^{k+m}}{q^k} = q^m.$$

又由 (i) 知 $P(X > m) = q^m$, 所以 $P(X > k+m | X > k) = P(X > m)$.

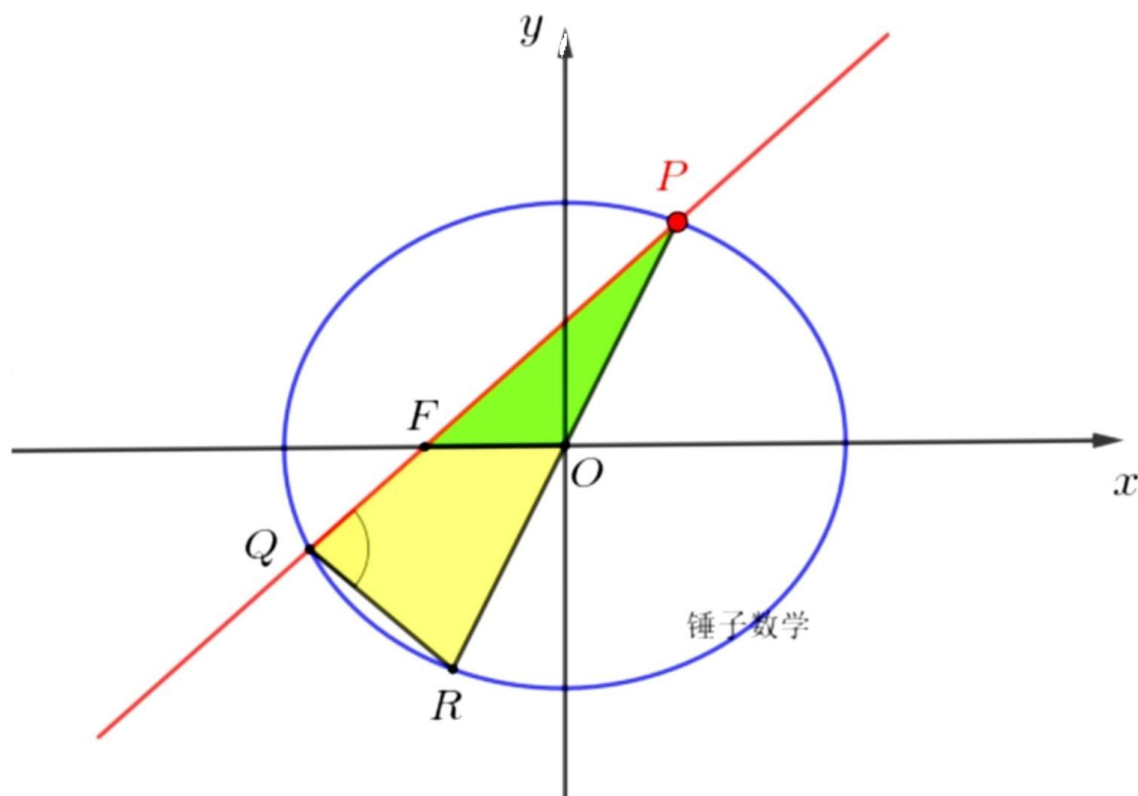
18. (17 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 $F(-1, 0)$, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 过 F 且斜率大于 0 的动直线 l 与 C 交于 P, Q 两点, 其中 Q 在第三象限, 直线 PO 与 C 的另一个交点为 R .

(i) 若 $\triangle PQR$ 的面积是 $\triangle PFO$ 的面积的 3 倍, 求 l 的方程;

(ii) 求 $\tan \angle PQR$ 的最小值.



【锤子数学解析】

方法一:

(1) 由 $F(-1, 0)$, 得 $c=1$. 又 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 所以 $a=2$, $b^2 = a^2 - c^2 = 3$, 故 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 设 $l: y = k(x+1) (k > 0)$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 其中 $x_1 > x_2$. 由 $y = k(x+1)$ 与 C 联立, 得 $(3+4k^2)x^2 + 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$, 所以 $x_1 + x_2 = -\frac{8k^2}{3+4k^2}$, $x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{3+4k^2}$.

椭圆关于原点对称, 所以 $R(-x_1, -y_1)$, 且 $y_1 = k(x_1+1)$, $y_2 = k(x_2+1)$.

$$(i) \text{ 由坐标面积公式, } S_{\triangle PQR} = k(x_1 - x_2), S_{\triangle PFO} = \frac{y_1}{2} = \frac{k(x_1+1)}{2}.$$

$$\text{由 } \frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle PFO}} = 3, \text{ 得 } 2(x_1 - x_2) = 3(x_1 + 1), \text{ 即 } x_1 + 2x_2 = -3.$$

$$\text{令 } u = k^2, \text{ 由 } x_1 + x_2 = -\frac{8u}{3+4u} \text{ 与 } x_1 + 2x_2 = -3, \text{ 得 } x_1 = \frac{9-4u}{3+4u}, x_2 = -\frac{9+4u}{3+4u}.$$

$$\text{代入 } x_1x_2 = \frac{4u-12}{3+4u}, \text{ 得 } \frac{(9-4u)(-9-4u)}{(3+4u)^2} = \frac{4u-12}{3+4u}, \text{ 解得 } u = \frac{5}{4}.$$

$$\text{故 } k = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ 所以 } l: y = \frac{\sqrt{5}}{2}(x+1).$$

$$(ii) \text{ 直线 } QR \text{ 的斜率为 } \frac{-y_1 - y_2}{-x_1 - x_2} = k \frac{x_1 + x_2 + 2}{x_1 + x_2} = -\frac{3}{4k}.$$

$$\text{于是 } \tan \angle PQR = \left| \frac{k + \frac{3}{4k}}{1 - \frac{3}{4}} \right| = 4k + \frac{3}{k} \geq 4\sqrt{3}.$$

$$\text{当 } k = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 时取等号, 故 } \tan \angle PQR \text{ 的最小值为 } 4\sqrt{3}.$$

方法二:

$$(1) \text{ 由 } c=1, e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \text{ 得 } a=2, b^2=3, \text{ 故 } C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

$$(2) (i) \text{ 设 } P(x, y), \text{ 其中 } y > 0. \text{ 由 } P \text{ 在椭圆上, 得 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

设 $\frac{FQ}{FP} = r (r > 0)$, 则 $Q(-1-r(x+1), -ry)$. 把 Q 代入椭圆, 得

$$\frac{[-1-r(x+1)]^2}{4} + \frac{r^2y^2}{3} = 1.$$

结合 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 化简, 得 $(2x+5)r^2 + 2(x+1)r - 3 = 0$. 其中 $r = -1$ 对应点 P , 故另一根为 $r = \frac{3}{2x+5}$.

又 $R = -P$, 所以 $S_{\triangle PQR} = (1+r)y$, $S_{\triangle PFO} = \frac{y}{2}$. 面积比为 3, 得 $2(1+r) = 3$, 所以 $r = \frac{1}{2}$.

于是 $\frac{3}{2x+5} = \frac{1}{2}$, 得 $x = \frac{1}{2}$. 再由 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 得 $y = \frac{3\sqrt{5}}{4}$, 所以 $k = \frac{y}{x+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

故 $l: y = \frac{\sqrt{5}}{2}(x+1)$.

(ii) 设 PQ 的斜率为 k , QR 的斜率为 m . 因为 $R = -P$, 所以 $m = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$.

由 P, Q 都在 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上, 作差得 $\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{4} + \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{3} = 0$.

两边同除以 $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$, 得 $\frac{1}{4} + \frac{km}{3} = 0$, 所以 $m = -\frac{3}{4k}$.

因此 $\tan \angle PQR = \left| \frac{k-m}{1+km} \right| = \left| \frac{k + \frac{3}{4k}}{1 - \frac{3}{4}} \right| = 4k + \frac{3}{k} \geq 4\sqrt{3}$.

当且仅当 $4k = \frac{3}{k}$, 即 $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等号, 所以最小值为 $4\sqrt{3}$.

方法三:

(1) 由左焦点和离心率, $c = 1$, $e = \frac{1}{2}$, 故 $a = 2$, $b^2 = 3$, $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 设 l 与 x 轴正向夹角为 θ , 则 $k = \tan \theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. 记 $u = \cos \theta$, $v = \sin \theta$.

椭圆上任一点 X 满足 $XF = a + ex = 2 + \frac{x}{2}$. 若 X 在 $F(-1, 0)$ 沿 θ 方向, 设 $XF = r$,

则 $x = -1 + ru$.

于是 $r = 2 + \frac{-1+ru}{2}$, 解得 $r = \frac{3}{2-u}$; 反方向同理得 $PF = \frac{3}{2-u}$, $FQ = \frac{3}{2+u}$.

(i) 因为 $R = -P$, 点 O 到 l 的距离为 $\sin \theta$, 点 R 到 l 的距离为 $2\sin \theta$.

$$\text{所以 } \frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle PFO}} = \frac{(PF + FQ) \cdot 2\sin\theta}{PF \cdot \sin\theta} = 2 \left(1 + \frac{FQ}{PF} \right) = 3.$$

$$\text{得 } \frac{PF}{FQ} = 2, \text{ 即 } \frac{2+u}{2-u} = 2, \text{ 所以 } u = \frac{2}{3}.$$

$$\text{因此 } k = \tan\theta = \frac{v}{u} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ 故 } l: y = \frac{\sqrt{5}}{2}(x+1).$$

$$(ii) \text{ 令 } m = PF, n = FQ, \text{ 则 } m - n = \frac{6u}{4 - u^2}.$$

由焦点极坐标可得

$$P = (-1 + mu, mv), Q = (-1 - nu, -nv), R = (1 - mu, -mv).$$

$$\text{于是 } k_{QR} = \frac{-(m-n)v}{2-(m-n)u} = \frac{-3u}{4v} = \frac{-3}{4k}.$$

$$\text{所以 } \tan\angle PQR = \frac{k + \frac{3}{4k}}{1 - \frac{3}{4}} = 4k + \frac{3}{k} \geq 4\sqrt{3}.$$

$$\text{当且仅当 } 4k = \frac{3}{k}, \text{ 即 } k = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 时取等号, 所以最小值为 } 4\sqrt{3}.$$

19. (17分) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2^x$. 对任意 $x_0 \in \mathbf{R}$,

定义集合 $D(x_0) = \{d \in \mathbf{R} \mid f(x_0 + d) > f(x_0)\}$.

(1) 若当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 1 - x$, 求 $D(-1)$;

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数, $f(x_1) \leq f(x_2)$, 且 $x_1 x_2 \neq 0$, 证明: $D(x_2) \subseteq D(x_1)$;

(3) 设 $f(x)$ 满足: ①若 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$; ②当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < f(0)$.

(i) 证明: $f(0) \geq 1$;

(ii) 证明: $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增.

【锤子数学解析】

方法一： (1) 设 $y = -1 + d$, 则 $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$. 当 $y < 0$ 时, $2^y > \frac{1}{2}$, 得 $y > -1$;

当 $y \geq 0$ 时, $1 - y > \frac{1}{2}$, 得 $y < \frac{1}{2}$. 所以 $-1 < y < \frac{1}{2}$, 即 $0 < d < \frac{3}{2}$, 故 $D(-1) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$.

(2) 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $x=0$ 时 $f(0)=0$, $x>0$ 时 $f(x)=-f(-x)=-2^{-x}$. 当 $x<0$ 时, 只有从 x 右移到 x 与 0 之间才会变大, 所以 $D(x)=(0, -x)$; 当 $x>0$ 时, 移到负半轴或移到 0 会变大, 在正半轴内继续右移也会变大, 所以

$$D(x) = \{d \mid d \leq -x\} \cup (0, +\infty).$$

若 $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, 由 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 得 $x_1 \leq x_2$, 于是 $(0, -x_2) \subseteq (0, -x_1)$, 即

$$D(x_2) \subseteq D(x_1).$$

若 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, 由 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 得 $x_1 \leq x_2$, 于是 $\{d \mid d \leq -x_2\} \subseteq \{d \mid d \leq -x_1\}$, 所以 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$.

若 $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, 则 $f(x_1) < 0 < f(x_2)$, 且 $D(x_2) = (0, -x_2) \subseteq (0, +\infty) \subseteq D(x_1)$. 若 $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, 则 $f(x_1) > 0 > f(x_2)$, 与 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 矛盾. 综上 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$.

(3) 先证明两个引理.

引理 1: 任意 $h > 0$, 若 $f(x) < 2^{-h}$, 则 $f(x+h) > f(x)$. 取 $u < -h$, 且让 $f(x) < 2^u$. 因为 $u+h < 0$, 所以 $f(u+h) = 2^{u+h} > 2^u = f(u)$, 即 $h \in D(u)$. 又 $f(x) < f(u)$, 由①得 $D(u) \subseteq D(x)$, 所以 $h \in D(x)$, 即 $f(x+h) > f(x)$.

引理 2: 任意 $h > 0$, 若 $f(x) > 0$, 则 $f(x-h) \leq f(x)$. 取 $u < 0$, 使 $2^u \leq f(x)$. 因为 $u-h < u < 0$, 所以 $f(u-h) < f(u)$, 即 $-h \notin D(u)$. 由 $f(u) \leq f(x)$ 得 $D(x) \subseteq D(u)$ 所以 $-h \notin D(x)$, 从而 $f(x-h) \leq f(x)$.

(i) 若 $f(0) < 1$, 取 $u < 0$ 使 $f(0) < 2^u$, 再取 $0 < h < \min\{-u, 1\}$. 此时 $u+h < 0$, 所以 $h \in D(u)$; 又 $f(0) < f(u)$, 由①得 $D(u) \subseteq D(0)$, 于是 $h \in D(0)$, 即 $f(h) > f(0)$. 但 $0 < h < 1$, 由②得 $f(h) < f(0)$, 矛盾. 故 $f(0) \geq 1$.

(ii) 先证 $x > 0$ 时 $f(x) \leq 0$. 当 $0 < t < 1$ 时, 若 $f(t) > 0$, 由引理 2 取 $h=t$, 得 $f(0) \leq f(t)$, 这与②矛盾, 所以 $0 < t < 1$ 时 $f(t) \leq 0$.

若存在 $a > 0$ 使 $f(a) > 0$, 由引理 2 取 $h = a$, 得 $f(0) \leq f(a)$, 结合 (i) 得 $f(a) \geq 1$. 取 $0 < t < \min\{a, 1\}$, 再取 $u < 0$, 令 $v = t - a + u$, 则 $v < u < 0$, 且 $f(a) > 2^u = f(u)$. 令 $d = a - u$, 则 $d \in D(u)$. 又 $f(v) < f(u)$, 由①得 $D(u) \subseteq D(v)$, 所以 $d \in D(v)$, 于是 $f(t) = f(v + d) > f(v) > 0$. 这与 $0 < t < 1$ 时 $f(t) \leq 0$ 矛盾. 因此 $x > 0$ 时 $f(x) \leq 0$. 任取 $0 < x_1 < x_2$, 令 $h = x_2 - x_1 > 0$. 因为 $f(x_1) \leq 0 < 2^{-h}$, 由引理 1 得 $f(x_2) > f(x_1)$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

方法二: (1) 令 $y = -1 + d$. 题目只是在问 $f(y) > \frac{1}{2}$ 的 y 在哪里: 负半轴上是 $2^y > \frac{1}{2}$, 得 $y > -1$; 非负半轴上是 $1 - y > \frac{1}{2}$, 得 $y < \frac{1}{2}$. 所以 $y \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$, 从而 $D(-1) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$.

(2) 奇函数把右半轴完全确定: $x > 0$ 时 $f(x) = -2^{-x}$, 且 $f(0) = 0$. 于是直接得到两类点的增大平移量: $x < 0$ 时 $D(x) = (0, -x)$, $x > 0$ 时

$D(x) = \{d \mid d \leq -x\} \cup (0, +\infty)$. 同号时, $f(x_1) \leq f(x_2)$ 等价于 $x_1 \leq x_2$, 两个集合的包含关系随之成立; 异号时只有 $x_1 > 0$ 、 $x_2 < 0$ 可能, 此时 $D(x_2) \subseteq (0, +\infty) \subseteq D(x_1)$. 故 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$.

(3) 把①读成一句话: 函数值越大, 可增大的平移量越少. 由负半轴 $f(x) = 2^x$ 很快得到两条门槛规则:

右移门槛: 对任意 $h > 0$, 若 $f(x) < 2^{-h}$, 则 $f(x+h) > f(x)$.

左移门槛: 对任意 $h > 0$, 若 $f(x-h) > f(x)$, 则 $f(x) \leq 0$.

若 $f(0) < 1$, 取 $u < 0$ 使 $f(0) < 2^u$, 再取 $0 < h < \min\{-u, 1\}$, 则 $h \in D(u)$. 由 $f(0) < f(u)$ 得 $D(u) \subseteq D(0)$, 所以 $h \in D(0)$, 与 $0 < h < 1$ 时 $f(h) < f(0)$ 矛盾. 故 $f(0) \geq 1$.

再看正半轴. 若 $0 < t < 1$ 且 $f(t) > 0$, 由左移门槛得 $f(0) \leq f(t)$, 与②矛盾, 所以 $0 < t < 1$ 时 $f(t) \leq 0$. 若存在 $a > 0$ 使 $f(a) > 0$, 则左移到 0 可知 $f(0) \leq f(a)$, 从而 $f(a) \geq 1$. 取 $0 < t < \min\{a, 1\}$, 令 $u < 0$, $v = t - a + u$, 则 $v < u < 0$. 平移 $a - u$ 从 u 到

a 时函数值变大, 而 $f(v) < f(u)$, 按①同一平移也必须使 v 变到 t 后函数值变大,

于是 $f(t) > 0$, 矛盾. 所以正半轴上恒有 $f(x) \leq 0$.

最后对任意 $0 < x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) \leq 0 < 2^{(x_2-x_1)}$, 由右移门槛直接得 $f(x_2) > f(x_1)$. 因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

方法三: (1) $D(-1) = \{d \in \mathbf{R} \mid f(-1+d) > f(-1)\}$, 由

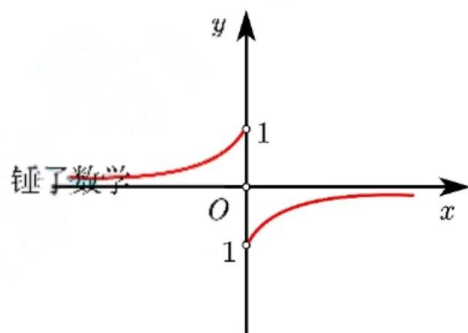
$$f(-1+d) > f(-1) \Rightarrow f(-1+d) > \frac{1}{2}$$

①当 $-1+d < 0$, 即 $d < 1$ 时, $f(-1+d) = 2^{-1+d} > \frac{1}{2} \Rightarrow -1+d > -1 \Rightarrow d > 0$, 此时 $0 < d < 1$

②当 $-1+d \geq 0$, 即 $d \geq 1$ 时, $f(-1+d) = 1 - (-1+d) = 2-d > \frac{1}{2} \Rightarrow d < \frac{3}{2}$, 此时

$$1 \leq d < \frac{3}{2}, \quad 0 < d < \frac{3}{2}, \quad \text{即集合 } D(-1) = \left\{d \mid 0 < d < \frac{3}{2}\right\}$$

(2) $\because f(x)$ 为奇函数, $\therefore x > 0$ 时, $f(x) = -f(-x) = -2^{-x}$, 作出 $f(x)$ 大致图像如下:



(i) 若 $x_1, x_2 < 0$, 由 $f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow x_1 \leq x_2$, 此时 $D(x_1) = \{d \in \mathbf{R} \mid f(x_1+d) > f(x_1)\}$

即 $f(x_1+d) > 2^{x_1}$, 显然此时 $x_1+d < 0 \Rightarrow d < -x_1$, 且 $2^{x_1+d} > 2^{x_1} \Rightarrow d > 0$, $\therefore 0 < d < -x_1$,

$D(x_1) = (0, -x_1)$, 同理 $D(x_2) = (0, -x_2)$, $\because x_1 \leq x_2$, $\therefore -x_1 \geq -x_2$, $D(x_2) \subseteq D(x_1)$

若 $x_1, x_2 > 0$ 同理得出

若 $x_1 > 0, x_2 < 0$, 则此 $D(x_1) = \{d \in \mathbf{R} \mid f(x_1+d) > f(x_1)\} \Rightarrow f(x_1+d) > -2^{-x_1}$

若 $x_1+d < 0$, 即 $d < -x_1$, 此时 $f(x_1+d) > 0 > -2^{-x_1}$, 显然成立

若 $x_1+d > 0$, 即 $-2^{-x_1-d} > -2^{-x_1} \Rightarrow d > 0$, 此时 $d > 0$ 或 $d < -x_1$

由 $D(x_2) \Rightarrow f(x_2 + d) > f(x_2) = 2^{x_2}$, $\therefore x_2 + d < 0 \Rightarrow d < -x_2$ 且 $2^{x_2+d} > 2^{x_2} \Rightarrow 0 < d < -x_2$

$\therefore D(x_2) = (0, -x_2) \subset D(x_1) = (-\infty, -x_1) \cup (0, +\infty)$, 证毕!

(3) (i) 反证法

若 $f(0) < 1$, 取 $x_0 \in (-1, 0)$, 让 $2^{x_0} > f(0)$, 即 $f(x_0) > f(0)$, $\therefore D(0) \supseteq D(x_0)$

易知 $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = 2^{\frac{x_0}{2}} > f(x_0) = 2^{x_0}$, $\therefore -\frac{x_0}{2} \in D(x_0) \Rightarrow -\frac{x_0}{2} \in D(0)$

$\therefore f\left(-\frac{x_0}{2}\right) > f(0)$, 这与 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < f(0)$ 恒成立矛盾, $\therefore$ 假设不成立

即 $f(0) \geq 1$

(ii) 先证明: 对 $\forall x \in (0, 1)$, $f(x) \leq 0$

否则可设 $x' \in (0, 1)$, $f(x') > 0$, 取 $t < 0$, 使得 $2^t = f(t) < f(x')$

$\therefore f(0) > f(x') \Rightarrow -x' \in D(x')$, 又 $\therefore f(t) < f(x') \Rightarrow D(t) \supseteq D(x')$

$\therefore -x' \in D(t)$, 即 $f(t - x') > f(t) \Rightarrow 2^{t-x'} > 2^t \Rightarrow x' < 0$ 这与 $x' \in (0, 1)$ 矛盾, 舍

同理可延伸证明: 对 $\forall x > 0$, $f(x) \leq 0$

任取 $x_2 > x_1 > 0$, 由 $f(x_1) \leq 0 < f(-(x_2 - x_1) - 1) \Rightarrow D(x_1) \supseteq D(-(x_2 - x_1) - 1)$

再由 $f(-1) > f(-(x_2 - x_1) - 1)$, 故 $x_2 - x_1 \in D(-(x_2 - x_1) - 1)$

$\therefore x_2 - x_1 \in D(x_1)$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增